

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 9 februarie 2024

Clasa a VII-a - Barem

1.	a) $a = 6\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$, $m_g = \sqrt{ab} = 6$	4p
	b) Obținem prin ridicări succesive la pătrat $x = 9$	3p
2.	a) Din $\frac{2a+3b}{3a+2b} = \frac{18}{17}$ obținem $4a = 3b$, deci $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$, iar din $\frac{b+2c}{2b+c} = \frac{14}{13}$ obținem $5b = 4c$, deci $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$. Va rezulta că $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$, k strict pozitiv, de unde $a = 3k$, $b = 4k$ și $c = 5k$. Atunci $a^2 + b^2 = c^2$	4p
	b) $a^n + b^n = c^n$ va fi echivalent cu $3^n + 4^n = 5^n$. Observăm că $n = 0, n = 1$ nu verifică iar $n = 2$ este soluție. Dacă prin absurd, $n > 2$ avem: $5^n = 25 \cdot 5^{n-2} = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{n-2} = 3^2 \cdot 5^{n-2} + 4^2 \cdot 5^{n-2} > 3^2 \cdot 3^{n-2} + 4^2 \cdot 4^{n-2} = 3^n + 4^n$, contradicție.	3p
3.	Fie P, Q mijloacele segmentelor AM respectiv BN . Atunci PN și QM linie mijlocie în $\triangle AMD$ respectiv $\triangle BNC$. Obținem $MNPQ$ paralelogram.	3p
	Dacă $AM \perp BN$, atunci $MNPQ$ este romb, deci $MN = MQ$ de unde $2 \cdot AB = 3 \cdot BC$.	2p
	Dacă $2 \cdot AB = 3 \cdot BC$, atunci $MN = MQ$, deci $MNPQ$ este romb, de unde $AM \perp BN$.	2p
3'	Fie P pe latura (AB) astfel încât $3AP = AB$, rezultă $APCM$ și $BCNP$ sunt paralelograme.	3p
	Dacă $AM \perp BN$, atunci $BCNP$ este romb de unde $BC = BP$, adică $2 \cdot AB = 3 \cdot BC$.	2p
	Dacă $2 \cdot AB = 3 \cdot BC$, atunci $BC = BP$, adică $BCNP$ este romb, de unde $AM \perp BN$.	2p
4.	a) Folosește proprietatea că într-un triunghi dreptunghic, mediana este jumătate din ipotenuză.	2p
	b) Fie D mijlocul lui $[BC]$. Cum $BC = 2 \cdot AB$ vom avea că triunghiul ABD este isoscel. Fie E piciorul bisectoarei din B în $\triangle ABC$. Cum $\hat{B} = 2 \cdot \hat{C}$, vom avea că triunghiul BCE este isoscel și atunci va rezulta că mediana ED este înălțime, deci $\angle BDE = 90^\circ$ (1). Pe de altă parte avem că $\triangle BDE \equiv \triangle BAE$ (L.U.L.), deci $\angle BDE = \angle BAE$ (2). Din (1) și (2) obținem cerința.	5p

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează similar baremului